

29-11-16

Ορισμός: Μια τοπολογία σ'έναν χώρο X είναι μια συλλογή συνόλων τ του X , ώστε:

- i) $\emptyset \in \tau$ και $X \in \tau$
- ii) $\text{Αν } V_1, V_2 \in \tau \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \tau$
- iii) $\text{Αν } A_i \in \tau, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

• Αν τ είναι μια τοπολογία στον X , τότε (X, τ) λέγεται τοπολογικός χώρος, ενώ τα στοιχεία της τ λέγονται ανοικτά σύνολα.

Ορισμός: Έστω B μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X . Τότε B είναι βάση για την τοπολογία του X , αν για κάθε ανοικτό σύνολο V και κάθε $x \in V$ ισχύει ότι: $(\exists U \in B): x \in U \subset V$.

Πχ Στο σύνολο $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική $d(x, y) = |x - y|$ και την τοπολογία που προκύπτει από αυτή. Τότε η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων είναι μια βάση για την τοπολογία αυτή.

Ορισμός: Ένα σύνολο $U \subset X$ θα λέγεται περιοχή ενός σημείου $a \in X$, αν υπάρχει ανοικτό σύνολο $V: a \in V \subset U$.

Ορισμός: Έστω X ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) και $x \in X$. Μια οικογένεια B_x περιοχών του x θα λέγεται βάση για τις περιοχές του x , αν κάθε περιοχή του x περιέχει ένα μέλος της B_x .
Τα μέλη της B_x θα λέγονται βασικές περιοχές του x .

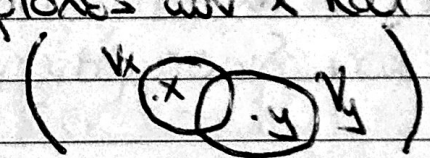
Πχ Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε για κάθε $x \in X$, η οικογένεια $B(x, \varepsilon) = \{y \in X: d(x, y) < \varepsilon\}$ αποτελούν οικογένεια βασικών περιοχών του x .
Αντιθέτως, $B_x = \{B(x, \varepsilon): \varepsilon > 0\}$

• Επιπλέον η οικογένεια $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για τις περιοχές του X .

Ορισμός: Ένα σημείο $a \in X$ λέγεται σημείο συσσώρευσης (σ.σ) για το σύνολο $A \subseteq X$ αν κάθε περιοχή του a : $V(a)$ περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του A διαφορετικό του a , δηλαδή: $(V(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset, \forall V(a)$

• Το σύνολο των σ.σ ενός συνόλου A , ονομάζεται παράγωγο σύνολο και συμβολίζεται με A' .

Ορισμός: Έστω $A \subseteq X$, όπου X τ.χ και έστω $x \in X$. Το x θα λέγεται ω -σημείο συσσώρευσης αν κάθε περιοχή του x , περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων του A .

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται T_1 αν $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν: V_x και V_y περιοχές των x και y αντίστοιχα με: $y \notin V_x$ και $x \notin V_y$. 

Ορισμός: Ένας τ.χ X λέγεται T_2 (ή Hausdorff) αν $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν V_x και V_y περιοχές των x, y αντίστοιχα ώστε: $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Παρατήρηση: $T_2 \Rightarrow T_1$

π.χ | Αν $X = \{a, b\}$, τ.χ και $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, τότε τ είναι τοπολογία για τον X . Ο (X, τ) δεν είναι T_2 .

Λύση

Δεν υπάρχει V_b που να μην περιέχει το a , συνεπώς $\forall V_b, V_a$: $V_b \cap V_a$ περιέχει το a . Άρα δεν είναι ούτε T_1 ούτε T_2 .

Παρατηρήσεις

1) Κάθε μετρικός χώρος (X, d) είναι χώρος T_2 . Διότι, έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$, τότε $0 < d(x_1, x_2)$. Έστω $\varepsilon = \frac{d(x_1, x_2)}{2}$ τότε θεωρώντας τις $B(x_1, \varepsilon)$ και $B(x_2, \varepsilon)$ έχουμε:
 $B(x_1, \varepsilon) \cap B(x_2, \varepsilon) = \emptyset$, γιατί αν $y \in B(x_1, \varepsilon) \cap B(x_2, \varepsilon) \Rightarrow$
 $y \in B(x_1, \varepsilon) \Rightarrow d(x_1, y) < \varepsilon \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y) + d(x_2, y) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{d}{2}$
 $y \in B(x_2, \varepsilon) \Rightarrow d(x_2, y) < \varepsilon$ Δηλαδή $d < \frac{d}{2}$, Άστοιχο!

2) Λόγω της 1) κάθε μετρικός χώρος (X, d) είναι και T_1 .

Πρόταση: Έστω (X, d) μ.χ και $A \subseteq X$, τότε ισχύει:
 $a \in A' \Leftrightarrow$ Κάθε περιοχή του A περιέχει άπειρα στοιχεία του A .

Απόδειξη

$\Rightarrow$ Έστω $a \in A'$ και V_a περιοχή του A η οποία περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του A , δηλ: $V_a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
Υποθέτουμε ότι $a \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας)
Έστω $B(a, r)$ περιοχή του a με $B(a, r) \subseteq V_a$. Επιρνύω ως
 $r_1 = \min \{r, d(a, a_1), d(a, a_2), \dots, d(a, a_n)\} \Rightarrow B(a, r_1) \cap A = \emptyset$ Άστοιχο!

$\Leftarrow$ Έστω ότι κάθε περιοχή του A , V_a περιέχει άπειρα στοιχεία του A , τότε $V_a \setminus \{a\}$ θα περιέχει επίσης άπειρα στοιχεία του A .
Συνεπώς, $V_a \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a \in A'$

Παρατήρηση: Αν (X, τ) είναι T_1 τότε οι έννοιες σ.σ και ω-σ.σ ταυτίζονται.

Πρόταση: Έστω (X, d) μ.χ τότε αν $A \subseteq X$:

$a \in A' \Leftrightarrow \{ \exists (x_n) \text{ s.t. } n \neq m, x_n \neq x_m \text{ με } \lim x_n = a \}$

Απόδειξη

$\Rightarrow$ Έστω $a \in A'$ και $n_1 \in \mathbb{N}$. Θεωρώ $B(a, \frac{1}{n_1}) \Rightarrow$ αφού $B(a, \frac{1}{n_1})$ είναι περιοχή του a , περιέχει άπειρα στοιχεία του A .
Έστω $x_{n_1} \in B(a, \frac{1}{n_1}) \cap A$
Αφού (X, d) είναι μ.χ είναι $T_1 \Rightarrow \exists n_2 > n_1 : B(a, \frac{1}{n_2}) \not\ni x_{n_1}$

$$\text{και } B(a, 1/n_2) \subseteq B(a, 1/n_1)$$

Επειδή $B(a, 1/n_2)$ περιοχή του $a \Rightarrow$ περιέχει άπειρα στοιχεία του A . Έστω $x_{n_2} \in B(a, 1/n_2) \cap A$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε ακολουθία (x_{n_k}) ώστε:

$$x_{n_k} \in B(a, 1/n_k) \text{ και ισχύει } x_{n_1} \neq x_{n_2} \text{ (για δύο γένη)}$$

$$\Downarrow$$

$$d(a, x_{n_k}) < 1/n_k \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$$

Θεώρημα Έστω $\exists (x_n) \in A, n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$ και $\lim x_n = a$

Έστω V_a μια περιοχή του a , τότε $\exists r: B(a, r) \subseteq V_a$. Αφού

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}): d(x_n, a) < r, \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_n \in B(a, r), \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V_a, \forall n \geq n_0$, δηλαδή άπειροι όροι ως x_n λίσκονται στην $V_a \Rightarrow$ άπειροι όροι λίσκονται και στο $V_a \cap A \Rightarrow (V_a \cap A) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a \in A$.

Πρόταση: Αν (X, d) μ.χ. τότε δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) που να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια.

Απόδειξη

$$\text{Έστω } l_1 \neq l_2 \Rightarrow 0 < \delta = d(l_1, l_2) \text{ και } \varepsilon = \delta/4$$

$$\exists n_1: d(a_n, l_1) < \varepsilon, \forall n \geq n_1$$

$$\exists n_2: d(a_n, l_2) < \varepsilon, \forall n \geq n_2$$

Επιλέγω ως $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, τότε $\forall n \geq n_0$:

$$d(l_1, l_2) \leq d(a_n, l_1) + d(a_n, l_2) < 2\varepsilon = \frac{\delta}{2}, \text{ Άτοπο!}$$

Παρατήρηση: Και τα όρια συναρτήσεων αν υπάρχουν είναι μοναδικά σε μ.χ.

Άσκ

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $y \in A$. Αν $\lim_{x \rightarrow y} f(x)$ υπάρχει στο $\tilde{\mathbb{R}} \Rightarrow$ το όριο ορίζεται μονοσήμαντα.

Λύση

Έστω ότι $\exists l_1, l_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$ ώστε: $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = l_1, \lim_{x \rightarrow y} f(x) = l_2$
 $l_1 \neq l_2$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- 1) $l_1 \in \mathbb{R}$ και $l_2 \in \mathbb{R}$
- 2) $l_1 \in \mathbb{R}$ και $l_2 = +\infty$
- 3) $l_1 \in \mathbb{R}$ και $l_2 = -\infty$
- 4) $l_1 = +\infty$ και $l_2 = -\infty$

Στην 1) απλώς δίνω διαδικασίες με την προηγ. πρόταση, δηλ.
 $d = |l_1 - l_2|$ και $\varepsilon = d/2$, τότε:

$$\exists \delta_1 > 0: x \in B_0(y, \delta_1) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(l_1, \varepsilon)$$

$$\exists \delta_2 > 0: x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(l_2, \varepsilon)$$

Αν πάρω ως $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ έχουμε $\forall x \in B_0(y, \delta_0) \cap A$:

$$d(l_1, l_2) \leq d(f(x), l_1) + d(f(x), l_2) < \varepsilon + \varepsilon = d, \text{ Άστοχο!}$$

Άρα, $l_1 = l_2$

Στην 2)

$$\text{Από } \lim_{x \rightarrow y} f(x) = l_1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_1 > 0): x \in B_0(y, \delta_1) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(l_1, \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow y} f(x) = l_2 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0) (\exists \delta_2 > 0): x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon_2} + l_1$$

$$\text{Για } \varepsilon = 1: f(x) < 1 + l_1$$

$$\text{Αν πάρω ως } \varepsilon_2: \frac{1}{\varepsilon_2} > 1 + l_1 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon_2} > 1 + l_1, \text{ Άστοχο!}$$

με $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Όμοια για 3)

Στην 4)

Έστω $\varepsilon > 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \exists \delta_1 > 0: x \in B_0(y, \delta_1) \cap A \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \\ \exists \delta_2 > 0: x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right\} \text{ Άστοχο! , αν πάρω ως } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$